

Данная серия методичек посвящается лучшему экзаменатору по электродинамике
Толоконникову Андрею Владимировичу
Так Шишанина Андрея Олеговича убрали с ФФ, сдавать электрод нам пришлось уже А.В.

Студент: А можно воду на экзамен взять? (На улице +32).

А.В.: А она алкоголесодержащая?

Студент: Ненененене!

А.В.: А зачем тогда вы её взяли?!

А.В.: Есть вопросы (по проведению экзамена)? Любые!

Студент: Как доказать гипотезу Римана?

А.В.: Берёте траву. Желательно потяжелее. Закуривайте, и тогда вам является дух Римана,
который вам всё и рассказывает.

А.В.: Ну что вы же мне не сказали, что у вас на семинарах по электродинамике Индия! Позвали бы
меня... Между прочим, я тоже в индийской истории разбираюсь!

А.В.: Почему так жарко? Лучше бы экзамен проводили на улице!

Студент: А мы так философию проводили!

А.В.: Философию? Пффф. На философии нужно много... (пауза) как бы так литературно сказать...
(пауза) (зацензурено)!

Теория.

Напомню, что у нас есть коммутирующие операторы \hat{L}_z и \hat{L}^2 . Им
соответствует один и тот же набор СФ $|lm\rangle$. Если подействовать на неё

оператором \hat{L}_z , то получим СЗ m :

$$\hat{L}_z |lm\rangle = m |lm\rangle \quad (1)$$

А если оператором \hat{L}^2 , то получим СЗ $l(l+1)$:

$$\hat{L}^2 |lm\rangle = l(l+1) |lm\rangle \quad (2)$$

Пример:

$$\hat{L}_z |3, -2\rangle = -2 |3, -2\rangle; \hat{L}^2 |3, -2\rangle = 3(3+1) |3, -2\rangle$$

А ещё у нас есть операторы \hat{L}_x и \hat{L}_y . Но работать с ними неудобно. Поэтому вводят вот такие вот операторы:

$$\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$$

Через которые выражают операторы \hat{L}_x и \hat{L}_y :

$$\hat{L}_x = \frac{\hat{L}_+ + \hat{L}_-}{2} \quad (3)$$

$$\hat{L}_y = \frac{\hat{L}_+ - \hat{L}_-}{2i} \quad (4)$$

Как же действуют эти операторы - \hat{L}_+ , \hat{L}_- на $|lm\rangle$? А они, не меняя l , меняют m , повышая или понижая его на 1:

$$\hat{L}_+ |lm\rangle = |l, m+1\rangle \quad (5)$$

$$\hat{L}_- |lm\rangle = |l, m-1\rangle \quad (6)$$

Пример:

$$\hat{L}_+ |4, 2\rangle = |4, 3\rangle; \quad \hat{L}_- |4, 2\rangle = |4, 1\rangle$$

Операторы \hat{L}_+ , \hat{L}_- называются операторами сдвига как раз потому, что они сдвигают m .

А вот чему, как вы думаете, будет равно $\hat{L}_+ |4, 4\rangle$? Нет, не $|4, 5\rangle$, т.к. l всегда $\geq m$. Будет тождественный ноль.

Аналогично $\hat{L}_{-}|l, -4\rangle = 10\rangle$ - дальше уменьшать m уже некуда.

Тождества (1)-(6) – всё, что нам потребуется для решения задач.

Задача 1. Найти среднее значение L_x^2 для $|lm\rangle$.

Решение. Применим формулу среднего значения:

$$\langle lm | \hat{L}_x^2 | lm \rangle$$

$$\hat{L}_x = \frac{\hat{L}_+ + \hat{L}_-}{2} \quad (3)$$

И вспомним, что

Тогда

Первый раз действуем \hat{L}_x на $|lm\rangle$: будет $\frac{|l, m+1\rangle + |l, m-1\rangle}{2}$

Второй раз действуем \hat{L}_x : будет $\frac{|l, m+2\rangle + 2|l, m\rangle + |l, m-2\rangle}{4}$

Теперь скалярно умножаем на $\langle lm|$. Т.к. все сферические функции ортогональны, то $\langle lm | l, m+2 \rangle = 0$ и $\langle lm | l, m-2 \rangle = 0$. Ответ: $\frac{1}{2}$.
Заметим, кстати, что он не зависит от того, какие были l и m у исходной функции $|lm\rangle$.

Мне, кстати этот процесс напоминает очередь в магазине на кассу:



Операторы такие выстраиваются в очередь, чтобы подействовать на кассиршу $|lm\rangle$. Каждый действует на результат предыдущего. Когда на кассиршу подействовали все операторы, она идёт домой, где ждут её дети-бра (сама кассирша-кет), которые выполнят над ней в заключение ещё скалярное произведение ☺

Задача 2. Рассчитать матричный элемент

$$\langle l, m-1 | \hat{L}_z \hat{L}_y | l, m \rangle$$

Решение. Сначала на $|l, m\rangle$ действует \hat{L}_y . Получим

$$\frac{|l, m+1\rangle - |l, m-1\rangle}{2i}$$

А затем \hat{L}_z . Он ничего не сдвигает, зато умножает на m :

$$\frac{(m+1)|l, m+1\rangle - (m-1)|l, m-1\rangle}{2i}$$

А затем домножение на $\langle l, m-1|$. Будет $\frac{1-m}{2i}$. Матричный элемент бывает мнимым и комплексным, в этом нет ничего страшного (действительными обязаны быть только диагональные матричные элементы, они же средние значения).

Как-то так и решаются задачи на моменты, они несложные.